Vrtilna količina

Vrtilna količina je pomembna količina gibanja, v klasični mehaniki jo glede na izhodišče sistema izračunamo kot vektorski produkt krajevnega vektorja in vektorja gibalne količine

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \mathrm{p}_x & \mathrm{p}_y & \mathrm{p}_z \end{vmatrix} = \left(y\mathrm{p}_z - z\mathrm{p}_y, z\mathrm{p}_x - x\mathrm{p}_z, x\mathrm{p}_y - y\mathrm{p}_x\right)$$

Če v to enačbo namesto koordinat in gibalnih količino vstavimo pripadajoče operatorje, dobimo operatorje komponent vrtilne količine

$$\hat{\mathrm{L}}_x = -\mathrm{i}\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right)$$

$$\hat{\mathrm{L}}_y = -\mathrm{i}\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} - x\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)$$

$$\hat{\mathrm{L}}_z = -\mathrm{i}\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} - y\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right)$$

Poglejmo si sedaj ali komutirajo med seboj komponente vrtilne količine

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathrm{L}}_x, \hat{\mathrm{L}}_y\right] = \hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_y - \hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_x &= (-\mathrm{i}\hbar)^2\left(y\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} - x\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right) - (-\mathrm{i}\hbar)^2\left(z\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} - x\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right) \\ &= (\mathrm{i}\hbar)^2\left[\left(y\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + yz\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}} - xy\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} + xz\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}}\right)\right. \\ &\left. - \left(zy\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}} - z^2\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} - xy\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2} + x\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + xz\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}}\right)\right]\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da so mešani odvodi enaki

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}}$$

in za komutator dobimo

$$\left[\hat{\mathrm{L}}_x, \hat{\mathrm{L}}_y\right] = (\mathrm{i}\hbar)^2\left[y\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} - x\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right] = \mathrm{i}\hbar\hat{\mathrm{L}}_z$$

Za ostala komutatorja dobimo

$$\left[\hat{\mathrm{L}}_y, \hat{\mathrm{L}}_z\right] = \mathrm{i}\hbar\hat{\mathrm{L}}_x$$

$$\left[\hat{\mathrm{L}}_z, \hat{\mathrm{L}}_x\right] = \mathrm{i}\hbar\hat{\mathrm{L}}_y$$

Vidimo, da niti dva operatorja komponent vrtilne količine ne komutirata, kar je v nasprotju opaženega pri operatorjih gibalne količine. Pri vrtilni količini tako ne moremo istočasno poljubno natančno poznati vrednosti dveh komponent vrtilne količine. To pomeni, da valovna funkcija ne more biti istočasno lastna funkcija za poljubna dva operatorja komponent vrtilne količine, kar je drugače kot pri koordinatah in komponentah gibalne količine, kjer vse komponente med seboj komutirajo. Pri vrtilni količini je tako, da takoj, ko poznamo vrednost ene komponente, sta preostali nedoločeni. Sedaj sestavimo še operator kvadrata vrtilne količine

$$\widehat{\mathrm{L}^2} = \hat{\mathrm{L}}_x{}^2 + \hat{\mathrm{L}}_y{}^2 + \hat{\mathrm{L}}_z{}^2$$

Poglejmo si sedaj komutator operatorja kvadrata vrtilne količine z eno izmed komponent

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{\mathrm{L}^2}, \hat{\mathrm{L}}_z\right] = \widehat{\mathrm{L}^2}\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_z\widehat{\mathrm{L}^2} = \left(\hat{\mathrm{L}}_x{}^2 + \hat{\mathrm{L}}_y{}^2 + \hat{\mathrm{L}}_z{}^2\right)\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_z\left(\hat{\mathrm{L}}_x{}^2 + \hat{\mathrm{L}}_y{}^2 + \hat{\mathrm{L}}_z{}^2\right) = \\
= \hat{\mathrm{L}}_x{}^2\hat{\mathrm{L}}_z + \hat{\mathrm{L}}_y{}^2\hat{\mathrm{L}}_z + \hat{\mathrm{L}}_z{}^3 - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_x{}^2 - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_y{}^2 - \hat{\mathrm{L}}_z{}^3 = \\
= \hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_z + \hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_x - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_y \\
= \hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_x + \hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_x - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_x + \hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_y + \hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_y - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_y = \\
= \hat{\mathrm{L}}_x\left(\hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_x\right) + \left(\hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_x\right)\hat{\mathrm{L}}_x + \hat{\mathrm{L}}_y\left(\hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_y\right) + \left(\hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_z - \hat{\mathrm{L}}_z\hat{\mathrm{L}}_y\right)\hat{\mathrm{L}}_y \\
= \hat{\mathrm{L}}_x\left[\hat{\mathrm{L}}_x, \hat{\mathrm{L}}_z\right] + \left[\hat{\mathrm{L}}_x, \hat{\mathrm{L}}_z\right]\hat{\mathrm{L}}_x + \hat{\mathrm{L}}_y\left[\hat{\mathrm{L}}_y, \hat{\mathrm{L}}_z\right] + \left[\hat{\mathrm{L}}_y, \hat{\mathrm{L}}_z\right]\hat{\mathrm{L}}_y \\
= -\hat{\mathrm{L}}_x \mathrm{i}\hbar\hat{\mathrm{L}}_y - \mathrm{i}\hbar\hat{\mathrm{L}}_y\hat{\mathrm{L}}_x + \hat{\mathrm{L}}_y\mathrm{i}\hbar\hat{\mathrm{L}}_x + \mathrm{i}\hbar\hat{\mathrm{L}}_x\hat{\mathrm{L}}_y = 0
\end{aligned}$$

Vidimo, da operator kvadrata vrtilne količine komutira z operatorjem z-komponente vrtilne količine. Na podoben način pokažemo, da komutirata tudi preostali komponenti

$$\left[\widehat{\mathrm{L}^2}, \hat{\mathrm{L}}_x\right] = 0$$

$$\left[\widehat{\mathrm{L}^2}, \hat{\mathrm{L}}_y\right] = 0$$

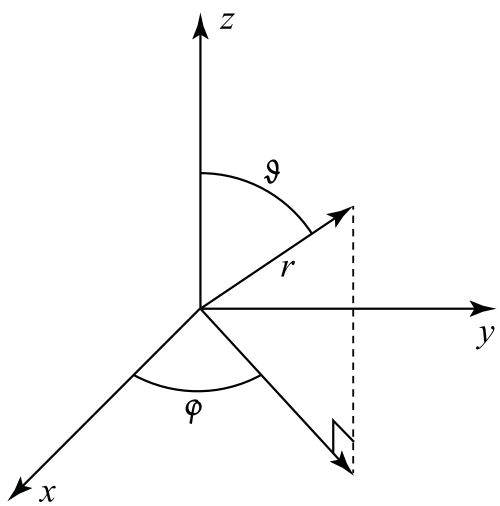
Operator kvadrata vrtilne količine komutira z operatorjem katerokoli komponente vrtilne količine, to pomeni, da lahko vedno istočasno poleg vrednosti ene komponente poznamo tudi vrednost kvadrata vrtilne količine. Za komponento je to kar komponenta v smeri z. Poleg tega, da lahko poznamo istočasno vrednosti komponente z in vrednost kvadrata vrtilne količine, je lastna funkcija komponente z hkrati tudi lastna funkcija kvadrata vrtilne količine. Iz operatorjev komponent vrtilne količine ne moremo sestaviti nobenega dodatnega operatorja, ki bi komutiral s komponentami in s kvadratom vrtilne količine, to pomeni, da je v kvantni mehaniki vrtilna količina določena, če poznamo velikost kvadrata vrtilne količine in velikost ene komponente.

Vrtenje teles oziroma kroženje delcev po navadi opisujemo v krogelnem oziroma sferičnem koordinatnem sistemu, kjer namesto koordinat x,y in z uporabljamo za opis položaja delca oddaljenost od izhodišča (r), kot, ki ga krajevni vektor oklepa z z osjo (ϑ) in kot, ki ga projekcija krajevnega vektorja v xy ravnini oklepa z x osjo (φ). Med koordinatami kartezičnega koordinatnega sistema in krogelnega veljajo naslednje zveze

$$x = rsin\vartheta cos\varphi$$

$$y = r sin\vartheta sin\varphi$$

$$z = r cos\vartheta$$



Slika 1: Krogelni koordinatni sistem.

Sferične koordinate pa lahko zavzamejo vrednosti

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

Operatorje vrtilne količine v krogelnem koordinatnem sistemu izrazimo kot

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(-sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - ctg\vartheta cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - ctg\vartheta sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\widehat{L^2} = -\hbar^2\left(\frac{1}{sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

Vidimo, da ima operator komponente vrtilne količine okoli osi z najpreprostejšo obliko, zato izberemo le to kot komponento, ki jo poznamo. Če v prostoru nimamo preferenčne smeri, so vse smeri enakovredne in osi poljubno usmerimo. Ko pa imamo v prostoru odlikovano smer, kot na primer smer magnetnega polja, postavimo os z v tej smeri.

Poiščimo sedaj lastne funkcije operatorja komponente vrtilne količine okoli osi z

$$\hat{\mathrm{L}}_z\psi = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \lambda\psi$$

Po integraciji dobimo

$$\psi(\varphi) = e^{\frac{i\lambda}{\hbar}\varphi}$$

Zahtevati moramo, da je funkcija enaka, ko se zavrtimo za polni kot

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$$

$$e^{\frac{i\lambda}{\hbar}\varphi} = e^{\frac{i\lambda}{\hbar}(\varphi+2\pi)} = e^{\frac{i\lambda}{\hbar}\varphi}e^{\frac{i\lambda}{\hbar}2\pi}$$

To je izpolnjeno, ko je

$$e^{\frac{i\lambda}{\hbar}2\pi} = 1$$

To pa, ko je $\frac{\lambda}{\hbar}$ celo število, se pravi imamo lastno vrednost enako

$$\lambda = m\hbar, m \in \mathbb{Z}$$

in normirano lastno funkcijo

$$\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

Lastne funkcije tvorijo ortonormirano bazo

$$\int_0^{2\pi}\psi_m(\varphi)\psi_n(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \delta_{mn}$$

Sedaj poiščimo še lastne funkcije operatorja kvadrata vrtilne količine

$$\widehat{\mathrm{L}^2}\mathrm{Y}(\vartheta,\varphi) = -\hbar^2\left(\frac{1}{sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin\vartheta\frac{\partial\mathrm{Y}(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right) = \lambda\mathrm{Y}$$

Tu najprej ločimo spremenljivke

$$\mathrm{Y}(\vartheta,\varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

in enačba se nam poenostavi na

$$-\hbar^2\left(\frac{\Phi(\varphi)}{sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\Theta(\vartheta)}{sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right) = \lambda\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

Celo enačbo sedaj delimo z $\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ in pomnožimo z $-sin^2\vartheta$ ter dobimo

$$\hbar^2 \frac{sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin\vartheta \frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \lambda sin^2\vartheta + \hbar^2 \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0$$

Omenjena enačba je rešljiva, ko sta $\hbar^2 \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}$ in $\hbar^2 \frac{sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin\vartheta \frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \lambda sin^2\vartheta$ konstanti.

$$\hbar^2 \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = -\mu$$

in

$$\hbar^2 \frac{sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin\vartheta \frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \lambda sin^2\vartheta = \mu$$

Prva enačba

$$\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} + \frac{\mu}{\hbar^2}\Phi(\varphi) = 0$$

ima rešitev

$$\Phi(\varphi) = Ae^{\frac{i\sqrt{\mu}}{\hbar}\varphi} + Be^{-\frac{i\sqrt{\mu}}{\hbar}\varphi}$$

Veljati mora, da je funkcija invariantna na polni zasuk

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

kar velja samo v primeru, ko je $\frac{\sqrt{\mu}}{\hbar}$ pozitivno ali negativno celo število

$$\sqrt{\mu} = m\hbar$$

Za funkcijo $\Phi(\varphi)$ pa je dovolj, da vzamemo samo pozitivno člen

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$$

Druga enačba ima obliko

$$\hbar^2 \frac{sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin\vartheta \frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \lambda sin^2\vartheta = m^2\hbar^2$$

Delimo jo s $\hbar^2$ ter pomnožimo s $\Theta(\vartheta)$ in dobimo

$$sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin\vartheta \frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\lambda}{\hbar^2} sin^2\vartheta\Theta(\vartheta) - m^2\Theta(\vartheta) = 0$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko $cos\vartheta = t$, $dt = -sin\vartheta d\vartheta$ in enačba se spremeni v

$$(1-t^2)\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left((1-t^2)\frac{\partial \Theta(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}\right)+\frac{\lambda}{\hbar^2}(1-t^2)\Theta(\mathrm{t})-m^2\Theta(\mathrm{t})=0$$

Enačbo sedaj delimo z $(1-t^2)$ ter imamo

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left((1-t^2)\frac{\partial \Theta(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}\right)+\frac{\lambda}{\hbar^2}\Theta(\mathrm{t})-\frac{m^2\Theta(\mathrm{t})}{(1-t^2)}=0$$

Izračunamo še odvode prvega dela

$$(1-t^2)\frac{\partial^2 \Theta(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}^2}-2\mathrm{t}\frac{\partial \Theta(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}+\frac{\lambda}{\hbar^2}\Theta(\mathrm{t})-\frac{m^2\Theta(\mathrm{t})}{(1-t^2)}=0$$

Posebna oblike te enačbe je Legendrova diferencialna enačba v primeru, ko je $m=0$ in jo zapišemo kot

$$(1-t^2)\frac{\partial^2 \Theta(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}^2}-2\mathrm{t}\frac{\partial \Theta(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}+\frac{\lambda}{\hbar^2}\Theta(\mathrm{t})=0$$

Spomnimo se še pogoja, da so valovne funkcije končne na vsem območju, pri nas gre t od -1 do 1. To pomeni, da mora biti $\Theta(\mathrm{t})$ na tem intervalu končna funkcija. Rešitev poiščemo s pomočjo vrst in sicer v obliki

$$\Theta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n,\frac{\mathrm{d}\Theta}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n t^{n-1},\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{dt^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n t^{n-2}$$

S primerjavo koeficientov ob istih potencah dobimo naslednjo rekurzivno formulo

$$c_{l+2}=c_l\frac{l(l+1)-\frac{\lambda}{\hbar^2}}{(l+1)(l+2)}$$

in dve splošni rešitvi oblike

$$\Theta_1=c_0\left(1+\frac{-\frac{\lambda}{\hbar^2}}{2!}t^2+\frac{-\frac{\lambda}{\hbar^2}\left(6-\frac{\lambda}{\hbar^2}\right)}{4!}t^4+\frac{-\frac{\lambda}{\hbar^2}\left(6-\frac{\lambda}{\hbar^2}\right)\left(20-\frac{\lambda}{\hbar^2}\right)}{6!}t^6+\cdots\right)$$

$$\Theta_2=c_1\left(t+\frac{2-\frac{\lambda}{\hbar^2}}{3!}t^3+\frac{\left(2-\frac{\lambda}{\hbar^2}\right)\left(12-\frac{\lambda}{\hbar^2}\right)}{5!}t^5+\frac{\left(2-\frac{\lambda}{\hbar^2}\right)\left(12-\frac{\lambda}{\hbar^2}\right)\left(30-\frac{\lambda}{\hbar^2}\right)}{7!}t^7+\cdots\right)$$

Omenjeni funkciji naraščata preko vseh meja, ko se približujemo 1. Končno vrednost imamo lahko le v primeru, ko sta Θ_1 in Θ_2 končna polinoma. To je izpolnjeno v primeru, ko je števec v rekurzivni formuli enak 0

$$l(l+1)-\frac{\lambda}{\hbar^2}=0$$

To je izpolnjeno, ko je parameter λ enak

$$\lambda = l(l+1)\hbar^2$$

l je element množice $l \in \{0,1,2,3 \ldots\}$. V tem primeru imamo splošno diferencialno enačbo oblike

$$(1-t^2)\frac{\partial^2\Theta(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}^2} - 2\mathrm{t}\frac{\partial\Theta(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}} + l(l+1)\Theta(\mathrm{t}) - \frac{m^2\Theta(\mathrm{t})}{(1-t^2)} = 0$$

Rešitve so posplošeni Legendrovi polinomi pridružene funkcije $P_l^m(\mathrm{t})$, ki jih izračunamo po naslednji formuli

$$P_l^m(\mathrm{t}) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-t^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}}(t^2-1)^l = (-1)^m(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dt^m}P_l(t)$$

Velja še

$$P_l^{-m}(\mathrm{t}) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\mathrm{t})$$

$P_l(t)$ pa so Legendrovi polinomi, za katere veljajo zveze

$$P_0(\mathrm{t}) = 1$$

$$P_1(\mathrm{t}) = t$$

$$P_2(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}(3t^2-1)$$

$$(n+1)P_{n+1}(\mathrm{t}) = (2n+1)tP_n(\mathrm{t}) - nP_{n-1}(\mathrm{t})$$

Prvih nekaj Legendrovih polinomov pridružene funkcije $P_l^m(\mathrm{t})$ v odvisnosti od $cos\vartheta$ zapišemo

$$P_0^0(cos\vartheta) = 1$$

$$P_1^0(cos\vartheta) = cos\vartheta$$

$$P_1^1(cos\vartheta) = -sin\vartheta$$

$$P_2^0(cos\vartheta) = \frac{1}{2}(3cos^2\vartheta - 1)$$

$$P_2^1(cos\vartheta) = -3cos\vartheta sin\vartheta$$

$$P_2^2(cos\vartheta) = 3sin^2\vartheta$$

Skupno rešitev $\mathrm{Y}(\vartheta,\varphi)$ zapišemo kot

$$\mathrm{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi) = N_{lm}P_l^m(cos\vartheta)e^{im\varphi}$$

Te funkcije imenujemo tudi krogelne funkcije oziroma sferični harmoniki. Normalizirano so s predpisom

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Y}_{lm}^{*}\mathrm{Y}_{lm} sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 1$$

in dobimo

$$\mathrm{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(cos\vartheta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

Krogelne funkcije tvorijo ortonormirano bazo

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Y}_{l'm'}^{*}\mathrm{Y}_{lm} sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{l'l}\delta_{m'm}$$

Tabela 1: Nekaj krogelnih funkcij.

l	m	$\mathrm{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi)$
0	0	$\mathrm{Y}_{00}(\vartheta,\varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$
1	0	$\mathrm{Y}_{10}(\vartheta,\varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} cos\vartheta$
1	±1	$\mathrm{Y}_{1\pm1}(\vartheta,\varphi) = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\mathrm{Y}_{20}(\vartheta,\varphi) = \left(\frac{5}{8\pi}\right)^{1/2} (3cos^2\vartheta - 1)$
2	±1	$\mathrm{Y}_{2\pm1}(\vartheta,\varphi) = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} sin\vartheta cos\vartheta e^{\pm i\varphi}$
2	±2	$\mathrm{Y}_{2\pm1}(\vartheta,\varphi) = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} sin^2\vartheta e^{\pm i2\varphi}$

Krogelne funkcije Y_{lm} so lastne funkcije operatorja kvadrata vrtilne količine $\widehat{\mathrm{L}^2}$ in komponente vrtilne količine v smeri osi z $\hat{\mathrm{L}}_z$ in za njih velja

$$\hat{\mathrm{L}}_z\mathrm{Y}_{lm} = m\hbar\mathrm{Y}_{lm}$$

$$\widehat{\mathrm{L}^2}\mathrm{Y}_{lm} = l(l+1)\hbar^2\mathrm{Y}_{lm}$$

Pri danem kvantnem številu l so dovoljena le kvantna števila m, ki so po absolutni vrednosti manjša ali kvečjemu enaka l

$$|m| \leq l$$

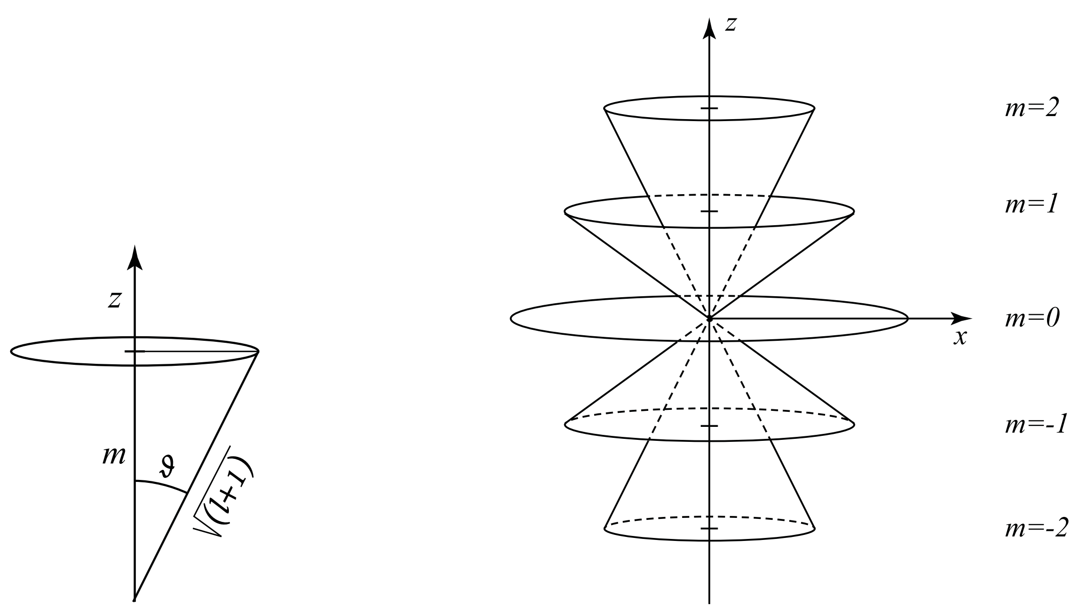
Velikost kvadrata vrtilne količine za stanje Y_{lm} je $l(l+1)\hbar^2$. Večkrat rečemo tudi kar $l(l+1)$, če vrtilno količino izrazimo v enotah $\hbar$. Dolžina vektorja vrtilne količine pa je $\sqrt{l(l+1)}\hbar$. Kvantno število l imenujemo kvantno število orbitalne vrtilne količine ali kar samo orbitalno kvantno število. Velikost komponente vrtilne količine v z smeri pa je enaka $m\hbar$. m imenujemo magnetno kvantno število. Zavzame celoštevilske vrednosti med $-l$ in l, skupno $2l+1$ vrendnosti. Vrtilna količina z vrednostjo l je $2l+1$ krat degenerirana. V kvantni mehaniki ima vrtilna količina drugačno naravo kot v klasični, saj vektorja vrtilne količine ne moremo poznati. To je različno tudi od vektorja gibalne količine in krajevnega vektorja v kvantni mehaniki, kjer lahko vse komponente poznamo istočasno. Pri vrtilni količini v kvantni mehaniki lahko poznamo le velikost in vrednost ene izmed komponent (komponento z). Vektor vrtilne količine si lahko predstavljamo, da se njegov položaj nedoločen na plašču stožca z višino m in dolžino stranice $\sqrt{l(l+1)}$. Nedoločenost preostalih dveh komponent je enaka kar kvadratu radija tega stožca

$$\Delta {L_x}^2 + \Delta {L_y}^2 = L^2 - {L_z}^2 = l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2$$

Nedoločenost obeh komponent sta enaki, tako da velja

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{l(l+1) - m^2}$$

Največja komponenta je $l\hbar$ in je manjša od velikosti vrtine količine $\sqrt{l(l+1)}\hbar$. Če bi bila največja velikost komponente lahko enaka velikosti vrtine količine, bi bili preostali dve komponenti enaki 0 in bi vse komponente poznali istočasno, kar pa je v nasprotju s komutacijskimi relacijami. Vse komponente lahko poznamo le v enem primeru, to je takrat, ko je velikost vrtilne količine enaka 0. Tedaj imajo tudi vse tri komponente vrednost 0. To ni v nasprotju s komutacijskimi zvezami, saj na desni strani nastopajo vrednosti komponent, ki so tukaj enake 0.



Slika 2: Levo: Vektor vrtilne količine v kvantni mehaniki je nedoločen na plašču stožca. Desno: Možna stanja za vektorje vrtilne količine s kvantnim številom l=2. Velikost vrtilne količine in z komponenta sta ostro določeni. Komponenti x in y sta nedoločeni.