Seštevanje vrtilnih količin

V kvantni mehaniki imamo velikokrat sisteme, kjer moramo velikokrat dobiti skupno vrtilno količino. Vrtilna količina je vektor, torej moramo sešteti vrtilne količine vseh delcev, da dobimo skupno vrtilno količino. V kvantni mehaniki to ni enostavno, saj smo videli, da vrtilne količine ne moremo poznati v celoti. Poznamo lahko le velikost in eno komponento. Poglejmo si sedaj sistem, kjer imamo dva delca z vrtilnima količinama $\overrightarrow{L_1}$ in $\overrightarrow{L_2}$. V kvantni mehaniki imamo operator vrtilne količine za prvi delec $\widehat{\vec{L}_1}$ in $\widehat{\vec{L}_2}$. Za oba delca poznamo kvadrat velikosti vrtilne količine $(l_1(l_1+1)\hbar^2, l_2(l_2+1)\hbar^2)$ in komponento vrtilne količine v smeri osi z $(m_1\hbar, m_2\hbar)$. Pri znani velikosti vrtilne količine l_1 imamo $2l_1+1$ možnosti za komponento m_1

$$m_1 \in \{-l_1, -l_1+1, \dots, l_1-1, l_1\}$$

pri l_2 imamo $2l_2+1$ možnosti za komponento m_2

$$m_2 \in \{-l_2, -l_2+1, \dots, l_2-1, l_2\}$$

Skupna vrtilna količina je vsota obeh vrtilnih količin in operator skupne vrtilne količine je

$$\hat{\vec{L}} = \widehat{\overrightarrow{L_1}} + \widehat{\overrightarrow{L_2}}$$

Operator kvadrata skupne vrtilne količine je enak

$$\hat{\vec{L}}^2 = \left(\widehat{\overrightarrow{L_1}} + \widehat{\overrightarrow{L_2}}\right)^2 = \widehat{\overrightarrow{L_1}}^2 + \widehat{\overrightarrow{L_2}}^2 + 2\widehat{\overrightarrow{L_1}}\widehat{\overrightarrow{L_2}} = \widehat{\overrightarrow{L_1}}^2 + \widehat{\overrightarrow{L_2}}^2 + 2(\hat{L}_{1x}\hat{L}_{2x} + \hat{L}_{1y}\hat{L}_{2y} + \hat{L}_{1z}\hat{L}_{2z})$$

Lastnih vrednosti operatorja kvadrata skupne vrtilne količine ne moremo določiti, saj ne poznamo vrednosti komponent x in y. Torej ne moremo določiti skupne vrtilne količine l, lahko pa določimo komponento v smeri osi z za skupno vrtilno količino

$$\hat{L}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$$

Skupna komponenta vrtilne količine v smeri osi z je kar vsota komponent posameznega delca

$$m\hbar = m_1\hbar + m_2\hbar$$

Ker vemo, katere vrednosti imata lahko projekciji, lahko izračunamo vse možne projekcije skupne vrtilne količine, teh pa je $2l+1$. Tako lahko po tem postopku uganemo velikost skupne vrtilne količine l. Poglejmo si tabelo za dve vrtilni količini $l_1 = 1$ in $l_2 = 2$.

m_2 \ m_1	-1	0	1
-2	-3	-2	-1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2
2	1	2	3

Iz tabele vidimo, da gre projekcija skupna vrtilne količine od -3 do 3, potem od -2 do 2 in še od -1 do 1. Prve projekcije ustrezajo skupni velikosti vrtilne količine 3, drugi 2 in zadnji 1. Za velikost skupne vrtilne količine dobimo naslednji pogoj

$$|l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2$$

Kar smo ugotovil, ne velja samo za obhodno vrtilno količino, temveč za vse vrtilne količine. Na takšen način seštevamo obhodne količine dveh delcev, spina dveh delcev ali pa spinsko in obhodno vrtilno količino.

V vodikovem atomu ima elektron obhodno vrtilno količino in spinsko vrtilno količino. Zanima pa nas njegova skupna vrtilna količina. Definirajmo operator skupne vrtilne količine elektrona

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$$

kot vsoto obhodne in spinske vrtilne količine elektrona. Skupno vrtilno količino dobimo po enačbah za vsoto vrtilnih količin. l_1 je enaka obhodni vrtilni količini elektrona l, l_2 pa spinski vrtilni količini $s = \frac{1}{2}$. Skupna vrtilna količina zavzame vrednosti, ki ustrezajo neenačbi

$$\left|l - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq l + \frac{1}{2}$$

Za polno vrtilno količino ima j dve vrednosti $l + \frac{1}{2}$ in $l - \frac{1}{2}$, če je $l > 0$. Za prvo možnost ima kvantno število m_j $2l + 2$ različnih vrednosti, za drugo pa $2l$, skupaj imamo $4l + 2 = 2(2l + 1)$ možnosti. Če je $l = 0$, potem je j lahko enak le $\frac{1}{2}$, m_j pa je lahko $-\frac{1}{2}$ ali $\frac{1}{2}$. j in m_j sta vedno polovični vrednosti. Stanje vodikovega atoma lahko podamo s kvantnimi števili

$$|n, l, m, m_s\rangle$$

ali pa s kvantnimi števili

$$|n, l, j, m_j\rangle$$

Lastne funkcije niso enake, saj vsebuje operator $\widehat{\overrightarrow{J^2}}$ tudi komponente vrtilne količine v smeri osi x in y $(\hat{\mathrm{L}}_x, \hat{\mathrm{L}}_y, \hat{\mathrm{S}}_x, \hat{\mathrm{S}}_y)$, lahko pa ene funkcije izrazimo z drugimi in obratno.

Magnetni moment vodikovega atoma je vsota magnetnega momenta zaradi obhodne vrtilne količine in magnetnega momenta zaradi spina

$$\hat{\vec{\mu}} = -\frac{e_0}{2m_e}\left(\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}}\right)$$

Spin ni povezan z magnetnim momentom na isti način kot obhodna vrtilne količina. Spinski del ima dodaten faktor 2. Operator skupnega magnetnega momenta s skupno vrtilno količino izrazimo kot

$$\hat{\vec{\mu}} = -\frac{e_0}{2m_e}\left(\hat{\vec{J}} + \hat{\vec{S}}\right)$$

Vidimo, da operator magnetnega momenta ni sorazmeren z operatorjem polne vrtilne količine. To pa pomeni, da lastna funkcija skupne vrtilne količine ni tudi lastna funkcija skupnega magnetnega momenta. Enako je le v posebnih primerih, ko je $\hat{\vec{L}}$ enak nič, na primer pri vodikovem in srebrovem atomu.