Numerično odvajanje

Po končani meritvi moramo podatke obdelati. Velikokrat nas zanima kako hitro se kakšna količina spreminja s časom. To nam pove odvod omenjene količine. Odvod je definiran kot

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Pri diskretno podanih funkcijah odvoda ne moremo izračunati z limito, temveč ga aproksimiramo z diferenco

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Iz Taylorjeve vrste dobimo za odvod prvega reda za diskretno podano funkcijo

x:	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$:	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

naslednja izraza

$$y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

in

$$y_{i-1}' = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Oziroma, če so točke ekvidistančne

$$y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

in

$$y_{i-1}' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

Oba odvoda na tem intervalu sta enaka. Če smo natančni, je izračunana vrednost najpravilnejša na sredini intervala pri $\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$. Natančnost formule je reda razlike h .

Natančnejši izraz dobimo, če za izračun odvodov uporabimo tri sosednje točke. V primeru da imamo ekvidistančne točke izračunamo odvod kot

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

za srednjo točko. Ta formula ima najmanjše koeficiente in najmanjšo napako, ki je reda h^2. Z omenjeno formulo, pa ne moremo izračunati odvoda v robnih točkah x_0 in x_n. Tam imamo posebni krajni formuli

$$y_0' = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$$

$$y_n' = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h}$$

Za druge odvode pa dobimo

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Lahko pa tudi prve odvode še enkrat odvajamo.

Numerično računanje odvodov je slabo pogojen problem. To pomeni, da se jih v splošnem ne da natančno izračunati. Izmerjene vrednosti imajo vedno končno natančnost, tako da je napaka zaradi teh nenatančnosti vedno reda $1/h$. Napaka računanja odvodov pa je vedno neka potenca h. Če manjšamo korak, nam narašča napaka funkcijskih vrednosti in obratno. Optimalna vednost je odvisna od natančnosti podatkov in formule za računanje odvodov.

NUMERIČINO ODVAJANJE FUNKCIJ DVEH SPRMENLJIVK

Odvode funkcij več spremenljivk numerično izračunamo kot

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{f(x,y+k) - f(x,y-k)}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{f(x+h,y) + f(x-h,y) - 2f(x,y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{f(x,y+k) + f(x,y-k) - 2f(x,y)}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{f(x+h,y+k) - f(x-h,y+k) - f(x+h,y-k) + f(x-h,y-k)}{4hk}$$