# Nelinearne enačbe

Razen za nekaj posebni funkcij, splošno ni možno najti analitičnega izraza za ničle funkcij, kjer bi lahko ničlo izračunali s poljubno natančnostjo. Numerične metode iskanja ničel so iterativne. Začnemo iz začetnega približka $x_0$ in zgradimo zaporedje približkov $\{x_k\}$ in upamo, da se to zaporedje približuje ničli naše funkcije. Ko se dovolj dobro približamo ničli funkcije, iterativni postopek končamo. Kot oceno, kdaj končamo lahko uporabimo enega izmed naslednjih kriterijev

- $|f(x_k)| < \varepsilon$ Funkcijska vrednost je manjša od podane natančnosti.
- $\left|\frac{x_{k-1}-x_k}{x_k}\right| < \varepsilon$ Relativna sprememba zaporednega približka je manjša od podane natančnosti.
- Število korakov iteracije je večje od predvidenega števila korakov.

## GRAFIČNA DOLOČITEV

Ničle funkcije lahko približno ocenimo, če funkcijo narišemo v programih kot je gnuplot, ali pa funkcijo v Excelu tabeliramo in jo narišemo.

## ITERACIJSKA METODA S FIKSNO TOČKO

Pri tej iteracijski metodi enačbo

$$f(x) = 0$$

najprej preoblikujemo v obliko

$$x = g(x).$$

Sedaj si izberimo začetni približek za ničlo $x_0$ in izračunajmo naslednji približek kot

$$x_1 = g(x_0)$$

in ta postopek ponavljamo

$$x_n = g(x_{n-1})$$

Dobimo zaporedje, ki pod določenimi pogoji konvergira k ničli enačbe. Računanje zaporednih členov zaporedja končamo, ko je na primer razlika med dvema zaporednima členoma manjša od želene natančnosti. Metoda ne konvergira vedno. Zadostni pogoj za konvergenco zaporedja približkov na intervalu [a,b] je, da za vsak izbrani x tega intervala je tudi funkcijska vrednost g(x) znotraj tega intervala ter da obstaja odvod funkcije g'(x) na tem intervalu, ki je za vse vrednosti x tega intervala po absolutni vrednosti manjši od 1.

## BISEKCIJA

Za funkcijo $f(x)$ vemo, da na intervalu $[a, b]$ spremeni predznak. Če je funkcija zvezna, mora imeti na tem intervalu vsaj eno ničlo (če pa ni, pa lahko s to metodo določimo tudi točke nezveznosti). Sedaj izračunamo razpolovišče intervala

$$c = \frac{a+b}{2}$$

in vrednost funkcije pri tem x-u $f(c)$. Sedaj določimo pol manjši interval, kjer funkcija spremeni predznak ($[a,c]$ ali $[c,b]$). Če sta vrednosti $f(a)$ in $f(c)$ različnega predznaka, nadaljujemo iskanje na intervalu $[a,c]$, če ne, pa na intervalu $[c,b]$. Postopek ponavljamo toliko časa, da je dolžina intervala, na katerem je ničla, manjša kot je želena natančnost.
Metoda je uporabna za iskanje ničel lihe stopnje, pri ničlah sode stopnje pa ne deluje. Metoda ima dobro stran, ker vedno najde korene v primeru ničel lihe stopnje, ima pa počasno konvergenco. Če je na intervalu več ničel, bo bisekcija našla eno izmed njih. Število korakov N, potrebnih za natančnost ničle $\varepsilon$, je $N = log_2 \frac{|b-a|}{\varepsilon}$ in je odvisno od velikosti začetnega intervala, je priporočljivo, da izberemo čim manjši začetni interval.

Primer: Največjo ničlo polinoma $x^6$-x-1=0 z natančnostjo 0,0001. Ničla leži na intervalu [1,2]. Pričakovano število iteracije je $\mathrm{N} = \log_2 \frac{|2-1|}{0{,}0001} = 13{,}288 \approx 14$. Kriterij za končanje uporabimo, ko je velikost intervala manjše od želene natančnosti.

| $a$ | $b$ | $c = \frac{a+b}{2}$ | $f(a)$ | $f(b)$ | $f(c)$ | $\varepsilon = b - a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1.5 | -1 | 61 | 8.890625 | 1 |
| 1 | 1.5 | 1.25 | -1 | 8.890625 | 1.564697266 | 0.5 |
| 1 | 1.25 | 1.125 | -1 | 1.564697266 | -0.09771347 | 0.25 |
| 1.125 | 1.25 | 1.1875 | -0.09771347 | 1.564697266 | 0.616653025 | 0.125 |
| 1.125 | 1.1875 | 1.15625 | -0.09771347 | 0.616653025 | 0.233268925 | 0.0625 |
| 1.125 | 1.15625 | 1.140625 | -0.09771347 | 0.233268925 | 0.061577832 | 0.03125 |
| 1.125 | 1.140625 | 1.1328125 | -0.09771347 | 0.061577832 | -0.019575551 | 0.015625 |
| 1.1328125 | 1.140625 | 1.13671875 | -0.019575551 | 0.061577832 | 0.020618995 | 0.0078125 |
| 1.1328125 | 1.13671875 | 1.134765625 | -0.019575551 | 0.020618995 | 0.000426842 | 0.00390625 |
| 1.1328125 | 1.13476563 | 1.133789063 | -0.019575551 | 0.000426842 | -0.009597993 | 0.001953125 |
| 1.133789063 | 1.13476563 | 1.134277344 | -0.009597993 | 0.000426842 | -0.004591496 | 0.000976563 |
| 1.134277344 | 1.13476563 | 1.134521484 | -0.004591496 | 0.000426842 | -0.002083808 | 0.000488281 |
| 1.134521484 | 1.13476563 | 1.134643555 | -0.002083808 | 0.000426842 | -0.000828854 | 0.000244141 |
| 1.134643555 | 1.13476563 | 1.13470459 | -0.000828854 | 0.000426842 | -0.000201099 | 0.00012207 |
| 1.13470459 | 1.13476563 | 1.134735107 | -0.000201099 | 0.000426842 | 0.000112848 | 6.10352E-05 |

**TANGENTNA METODA (NEWTONOVA, NEWTON-RAPHSONOVA)**

Pri metodi si izberimo začetni približek za ničlo $x_0$ in pri tem x-u postavimo tangento na krivuljo. Enačba tangente ima obliko

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ta tangenta seka os x pri $x_1$, ki ga izračunamo po naslednji enačbi ($y = 0$)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

To je sedja novi približek za ničlo. Sedaj pri $x_1$ postavimo tangento, zopet poiščemo ničlo in ta postopek ponavljamo. Dobimo zaporedje z naslednjo rekurzivno formulo

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Računanje zaporednih členov zaporedja končamo, ko je razlika med dvema zaporednima členoma manjša od želene natančnosti ali ko je vrednost $f(x_n)$ zalo majhna. Če ta kriterij ni nikoli izpolnjen, izvajanje prekinemo, ko dosežemo veliko število iteracij in poizkusimo z drugo začetno vrednostjo. Če je začetna vrednost predaleč od rešitve, ne konvergira, prav tako se lahko iteracijski postopek ujame v cikel. Ta metoda ima kvadratično konvergenco in konvergira, če le ni pri katerem členu zaporedja odvod funkcije enak 0. Če je začetni približek za ničlo kompleksno število, potem metoda poišče tudi kompleksne ničle. Metoda zahteva, da poznamo vrednost odvoda, kar v veliko primerih ni možno.

Primer: Izračun $\sqrt{2}$ s pomočjo Newtonove metode zahteva, da najprej sestavimo funkcijo, katere rešitev je ta koren. To je na primer $f(x) = x^2 - 2$. Odvod funkcije pa je $f'(x) = 2x$. Za začetni približek si izberimo $x_0 = 2$. Želena natančnost je $10^{-5}$.

| n | $\mathrm{x_n}$ | $\mathrm{f(x) = x^2 - 2}$ | $\mathrm{f'(x) = 2x}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 4 |
| 1 | 1.5 | 0.25 | 3 |
| 2 | 1.416667 | 0.006944444 | 2.833333333 |
| 3 | 1.414216 | 6.0073E-06 | 2.828431373 |

## SEKANTNA METODA

Prednost metode je, da ne potrebujemo poznati odvod, kot pri Newtonovi metodi. Pri metodi si izberemo dva začetna približka za ničlo $x_0$ in $x_1$ in skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_1, f(x_1))$ potegnemo premico, ki ima obliko

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) + f(x_1).$$

Ta premica seka os x pri $x_2$, ki ga izračunamo po naslednji enačbi ($y = 0$)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

To je sedja novi približek za ničlo. Sedaj postavimo sekanto skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_1, f(x_1))$, zopet poiščemo ničlo in to ponavljamo. Dobimo zaporedje z naslednjo rekurzivno formulo

$$x_n = \frac{x_{n-2} f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

Računanje zaporednih členov zaporedja končamo, ko je razlika med dvema zaporednima členoma manjša od želene natančnosti ali ko je vrednost $f(x_n)$ zalo majhna.
Omenjeno formulo dobimo tudi, če v tangentno metodo vstavimo formulo za numerično izračunan odvod. Metoda konvergira počasneje kot tangentna metoda, vendar hitreje kot bisekcija. Izpeljanka sekantne metode je regula falsi metoda.

Primer: $\sqrt{2}$ s pomočjo sekantne metode. Za začetna približka sta $x_0 = 2$ in $x_1 = 1$. Natančnost je $10^{-5}$.

| n | $\mathrm{x_n}$ | $\mathrm{f(x) = x^2 - 2}$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | -1 |
| 2 | 1.333333 | -0.222222222 |
| 3 | 1.428571 | 0.040816327 |
| 4 | 1.413793 | -0.001189061 |
| 5 | 1.414211 | -6.00729E-06 |