

Numerično integriranje

Po končani meritvi moramo velikokrat podatke obdelati tako, da moramo izračunati ploščino pod krivuljo, oziroma izračunati določeni integral. Ker merjene funkcije niso analitično podane, ne moremo izračunati nedoločenega integrala, tako da lahko določen integral izračunamo le numerično.

TRAPEZNA FORMULA

Denimo, da imamo funkcijo podano kot

x :	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$:	y_0	y_1	...	y_n

Ploščino pod krivuljo aproksimiramo s trapezi. Naredimo linearno interpolacijo skozi dve sosednji točki. Ploščina trapeza skozi prvi dve točki je

$$s_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} (x_1 - x_0)$$

$\frac{y_0 + y_1}{2}$ je srednjica trapeza in $(x_1 - x_0)$ višina. Celotni integral pod krivuljo pa je sedaj vsota ploščin vseh trapezov

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=1}^n s_i$$

Če so vse točke ekvidistančne, potem je razlika zaporednih vrednosti x enaka $(x_{i+1} - x_i) = h$ in formulo za integral lahko poenostavimo in dobimo

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Napaka metode je reda h^2 .

SIMPSONOVA FORMULA

Pri tej metodi aproksimiramo kvadratno funkcijo skozi tri zaporedne točke in izračunamo ploščino pod kvadratno funkcijo. Ploščina skozi točke x_0 , $x_1 = x_0 + h$ in $x_2 = x_0 + 2h$ je enaka

$$s_1 = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3} h$$

Celotni integral pod krivuljo pa je sedaj vsota vseh ploščin. n mora biti sodo število, ploščin pa je $n/2$. Druga ploščina je skozi točke $x_2 = x_0 + 2h$, x_3 in x_4 .

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n/2} s_i$$

Formulo za integral lahko poenostavimo in dobimo

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Napaka metode je reda h^5 .

GAUSSOVE KVADRATURNE FORMULE

Gaussove kvadraturne formule reda n (skozi n točk) so sestavljene tako, da nam da pravi integral do polinomov $2n - 1$ z izbiro delilnih točk x_i in uteži w_i

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Red formule n	Delilne točke x_i	Uteži w_i
1	0	2
2	$\pm \sqrt{1/3}$	1
3	0 $\pm \sqrt{3/5}$	$8/9$ $5/9$
4	$\pm \sqrt{\frac{(3 - 2\sqrt{6/5})}{7}}$ $\pm \sqrt{\frac{(3 + 2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$ $\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$

Če funkcija ni na intervalu $(-1,1)$, potem uporabimo naslednjo transformacijo

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$